ماز

دوپینگ فوری

شب امتحان

خلاصه فشرده برای مرور سریع

گسسته دوازدهم ریاضی

فصل اول

اثبات به روش برهان خلف

برهان خلف نوعی اثبات غیرمستقیم است که در آن فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض، به یک نتیجه غیرممکن و یا نتیجه‌ای متضاد با فرض مسئله می‌رسیم و در نهایت معلوم می‌شود که فرضِ نادرست بودن حکم، باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

مثال:

اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد ثابت کنید $\alpha-\beta$ گنگ است.

فرض خلف: فرض می‌کنیم $\alpha-\beta$ گویا باشد.

می‌دانیم جمع دو عدد گویا عددی گویا است پس:

$$(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\in\mathbb{Q}\to 2\alpha\in\mathbb{Q}\to\alpha\in\mathbb{Q}$$

از طرفی طبق فرض‌مسئله می‌دانیم که α عددی گنگ است که با نتیجه فوق $(\alpha\in\mathbb{Q})$ در تناقض است.لذا فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است که همه موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم.

مثال:

ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، n^2-5n+7 عددی فرد است.

دو حالت ممکن است رخ دهد:

الف) n زوج باشد:

$$n=2k\to n^2-5n+7=(2k)^2-5(2k)+7=2(2k^2-5k+3)+1=2q+1$$

ب) n فرد باشد:

$$n=2k-1\to n^2-5n+7=(2k-1)^2-5(2k-1)+7=4k^2-14k+13=2(2k^2-7k+6)+1=2q+1$$

که در هر دو حالت، حاصل یک عدد فرد است.

اثبات به روش بازگشتی

در این روش از حکم مسئله شروع می‌کنیم و با فرض درستی حکم، به یک رابطه بدیهی یا فرض مسئله می‌رسیم. در استفاده از این روش برای ساده کردن حکم مسئله از گزاره‌های دو شرطی استفاده می‌کنیم.

توجه: گزاره دو شرطی $A\Leftrightarrow B$، زمانی درست است که گزاره‌های A و B هم‌ارزش باشند.

مثال:

به روش بازگشتی ثابت کنید اگر $a>0$ آن‌گاه $a+\frac{1}{a}\geq 2$ است.

$$a+\frac{1}{a}\geq 2\Leftrightarrow a^2+1\geq 2a\Leftrightarrow a^2-2a+1\geq 0\Leftrightarrow (a-1)^2\geq 0\to$$ همواره برقرار است

مثال:

به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است.

$$xy\leq\frac{x^2+y^2}{2}\Leftrightarrow 2xy\leq x^2+y^2\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy\geq 0\Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0\to$$ همواره درست

مثال:

برای هر سه عدد حقیقی z و y و x ثابت کنید: $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz$

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2\geq 2xy+2yz+2xz$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2-2xy)+(y^2+z^2-2yz)+(x^2+z^2-2xz)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\geq 0\to$$ همواره درست

بخش‌پذیری

عدد صحیح b را بر عدد صحیح و مخالف صفر a بخش‌پذیر گوییم هرگاه عدد صحیحی مانند q وجود داشته باشد به طوری که: $b = aq$

$a \mid b$ یعنی:
- عدد a شمارنده عدد b است.
- عدد a، عدد b را می‌شمارد.
- b بر a بخش‌پذیر است.
- b مضرب a است.
- a، مقسوم‌علیه b است.

ویژگی‌های رابطه عاد کردن:

- $a \mid b \to \begin{cases} a \mid -b \\ -a \mid b \\ -a \mid -b \end{cases}$
- $a \mid b \to a \mid mb$
- $a \mid b \to a \mid b^n \; ; (n \in \mathbb{N})$
- $a \mid b \wedge b \mid c \to a \mid c$
- $a \mid b \wedge a \mid c \to a \mid b \pm c \xrightarrow{\text{تعمیم}} a \mid b \wedge a \mid c \to a \mid mb \pm nc$
- $a \mid b \xrightarrow{b \neq 0} |a| \leq |b| \xrightarrow{\text{نتیجه}} a \mid b \wedge b \mid a \to a = \pm b$
- $a \mid b \to a^n \mid b^n \; ; (n \in \mathbb{N})$
- $a \mid b \wedge c \mid d \to ac \mid bd$
- $a \mid b \xrightarrow{n \leq m} a^n \mid b^m \; ; (n, m \in \mathbb{N})$

مثال:

اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به طوری که $۵ \mid ۴k+۱$، ثابت کنید $۲۵ \mid ۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$.

$$۵ \mid ۴k+۱ \xrightarrow[\text{طرفین}]{\text{توان ۲}} ۲۵ \mid ۱۶k^۲ + ۸k + ۱$$
$$۵ \mid ۴k+۱ \xrightarrow[\text{طرفین}]{\times ۵} ۲۵ \mid ۲۰k + ۵$$
$$\xrightarrow[\text{سمت راست}]{+} ۲۵ \mid ۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$$

نکته:

- هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارنده مثبتی به‌جز یک و خودش نداشته باشد عدد اول نامیده می‌شود.

مجموعه اعداد اول: $p = \{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, \cdots\}$

- اگر p عددی اول و a عددی طبیعی بوده و $a \mid p$، داریم: $a = ۱$ یا $a = p$

مثال:

اگر $a \mid ۹k+۷$ و $a \mid ۷k+۶$ و $a \in \mathbb{N}$ باشد ثابت کنید $a = ۱$ یا $a = ۵$.

$$a \mid ۹k+۷ \xrightarrow[\times ۷]{\text{طرف راست}} a \mid ۶۳k + ۴۹$$
$$a \mid ۷k+۶ \xrightarrow[\times ۹]{\text{طرف راست}} a \mid ۶۳k + ۵۴$$
$$\xrightarrow[\text{سمت راست}]{-} a \mid ۵ \to \begin{cases} a = ۱ \\ \text{یا} \\ a = ۵ \end{cases}$$

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب. م. م)

۱) عدد طبیعی d را ب‌م‌م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

- $d|a\ ,\ d|b$
- $\forall m>0\ ;\ m|a\ ,\ m|b \to m\le d$

۲) اگر $a|b$، داریم: $(a,b)=|a|$

۳) اگر p عددی اول باشد و $a\in\mathbb{Z}$ و $p\nmid a$، داریم: $(p,a)=1$

۴) اگر p و q هر دو اول باشند و $p\neq q$ باشد، داریم: $(p,q)=1$

۵) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول هستند. ببینید:

$$(m,m+1)=d\to\begin{cases}d|m\\d|m+1\end{cases}\xrightarrow[\text{سمت‌راست}]{-}d|1\to d=1$$

۶) دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول هستند. ببینید:

$$(2n-1,2n+1)=d\to\begin{cases}d|2n-1\\d|2n+1\end{cases}\xrightarrow[\text{سمت‌راست}]{-}d|2\to d=1 \text{ یا } d=2$$

از طرفی چون $2n+1$ (یا $2n-1$) عددی فرد است و یک عدد زوج نمی‌تواند یک عدد فرد را بشمارد $2\nmid 2n+1$ بنابراین $d=2$ غیرقابل قبول است.

مثال:

m عددی صحیح است حاصل $(2m,6m^3)$ را بیابید:

$2m|6m^3\to(2m,6m^3)=|2m|$

کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک. م. م)

۱) عدد طبیعی c را ک‌م‌م دو عدد صحیح و ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a,b]=c$، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

- $a|c\ ,\ b|c$
- $\forall m>0\ ;\ a|m\ ,\ b|m\to c\le m$

۲) اگر $a|b$ داریم: $[a,b]=|b|$

مثال:

حاصل موارد زیر را به دست آورید: $(m\in\mathbb{Z})$

- $([m^2,m],m^5)$

چون $m|m^2$، داریم:

$[m^2,m]=|m^2|=m^2$

حال باید حاصل (m^2,m^5) را به دست بیاوریم. می‌دانیم که $m^2|m^5$ پس:

$(m^2,m^5)=|m^2|=m^2$

- $[m^7,(m^2,m^3)]$

چون $m^2|m^3$، در نتیجه:

$(m^2,m^3)=|m^2|=m^2$

حال باید حاصل $[m^7,m^2]$ را بیابیم. می‌دانیم که $m^2|m^7$ پس:

$[m^7,m^2]=|m^7|$

قضیه تقسیم

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می‌شوند به طوری که:

$$a = bq + r \ ; \ 0 \le r < b$$

مثال:

اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(2a+3)$ بر ۸ را به دست آورید:

$$a = 4q + 3 \xrightarrow{\times 2} 2a = 8q + 6 \xrightarrow{+3} 2a + 3 = 8q + 9$$

$$\to 2a + 3 = 8(q+1) + 1 = 8q' + 1 \to \text{باقی‌مانده} = r = 1$$

مثال:

اگر در تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

$$a = bq + r \ ; \ 0 \le r < b \to a - bq = r$$

می‌دانیم که a، مقسوم و b مقسوم‌علیه است لذا طبق اطلاعات سؤال:

$$\begin{cases} n \mid a \\ n \mid b \xrightarrow[\text{سمت راست}]{\times q} n \mid bq \end{cases} \to \begin{cases} n \mid a \\ n \mid bq \end{cases} \xrightarrow{(-)} n \mid \underbrace{a - bq}_{r} \to n \mid r$$

افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم

با توجه به قضیه تقسیم می‌دانیم که اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد با تقسیم آن بر عدد طبیعی b، با توجه به اینکه باقی‌مانده تقسیم یعنی r در رابطه $0 \le r < b$ صدق می‌کند، برای a برحسب r دقیقاً b حالت وجود دارد.

مثلاً در تقسیم a بر عدد طبیعی ۴، داریم:

$$a = 4q + r \ , \ r = 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \to \begin{cases} a = 4q \\ a = 4q + 1 \\ a = 4q + 2 \\ a = 4q + 3 \end{cases}$$

توجه ۱: اگر $p > 3$ عددی اول باشد آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ نوشته می‌شود.

توجه ۲: هر عدد صحیح و فرد مانند a، به یکی از دو صورت $a = 4k + 1$ یا $a = 4k + 3$ نوشته می‌شود.

توجه ۳: مربع هر عدد فرد به صورت $(8t + 1)$ نوشته می‌شود.

مثال:

ثابت کنید اگر $p \ge 5$ عددی اول باشد آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 3$ نوشته می‌شود.

$$p = 4k \ , \ p = 4k + 1 \ , \ p = 4k + 2 \ , \ p = 4k + 3$$

در حالت $p = 4k$ و $p = 4k + 2 = 2(2k + 1)$، p عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم $p = 4k + 3$ یا $p = 4k + 1$ خواهند بود.

مثال:

اگر a عددی صحیح و فرد باشد که $b \mid a + 2$، باقی‌مانده تقسیم عدد $(a^2 + b^2 + 3)$ را بر ۸ به دست آورید.

a عددی فرد است بنابراین $a + 2$ عددی فرد است و چون $b \mid a + 2$، بنابراین b نیز عددی فرد خواهد بود. از طرفی می‌دانیم که مربع هر عدد فرد به صورت $(8t + 1)$ است پس:

$$a^2 + b^2 + 3 = (8t + 1) + (8t' + 1) + 3 = 8(t + t') + 5 = 8t'' + 5 \to r = 5$$

مثال:

اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a + 2$ یا $a + 4$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

$$a = 3k$$

$$a = 3k + 1 \xrightarrow{+2} a + 2 = 3k + 3 \to a + 2 = 3(k + 1) = 3k'$$

$$a = 3k + 2 \xrightarrow{+4} a + 4 = 3k + 6 \to a + 4 = 3(k + 2) = 3k''$$

رابطه هم نهشتی

برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b، اگر $m \mid a-b$ ، می‌گوییم « a به پیمانه m با b هم‌نهشت است» و می‌نویسیم $a \overset{m}{\equiv} b$ که این تعریف به زبان ریاضی عبارت است از:

$$\forall a,b \in \mathbb{Z}\ ,\ a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m \mid a-b\ ,\ (m \in \mathbb{N})$$

توجه: مجموعه همه اعداد صحیحی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی m برابر با r می‌باشد را کلاس یا دسته هم‌نهشتی r به پیمانه m می‌گوییم و با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم.

$$[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r, k \in \mathbb{Z}\}$$

ویژگی‌های رابطه هم‌نهشتی:

- $a \overset{m}{\equiv} b \to a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c\ ;(c \in \mathbb{Z})$
- $a \overset{m}{\equiv} b \to ac \overset{m}{\equiv} bc\ ;(c \in \mathbb{Z})$
- $a \overset{m}{\equiv} b \to a^n \overset{m}{\equiv} b^n\ ;(n \in \mathbb{N})$
- $\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{cases} \to \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bd \\ a+c \overset{m}{\equiv} b+d \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-d \end{cases}$
- $a \overset{m}{\equiv} b\ ,\ b \overset{m}{\equiv} c \to a \overset{m}{\equiv} c$
- $a \overset{m}{\equiv} b \to a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk\ ;(t,k \in \mathbb{Z})$
- $ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow{(c,m)=d} a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b \xrightarrow{\text{نتیجه}} ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow{(c,m)=1} a \overset{m}{\equiv} b$
- $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{n \mid m} a \overset{n}{\equiv} b$
- $a \overset{m}{\equiv} b\ ,\ b \overset{n}{\equiv} c \xrightarrow{(m,n)=d} a \overset{d}{\equiv} c$

توجه: اگر باقی‌مانده تقسیم a بر m برابر r باشد در این صورت داریم، $a \overset{m}{\equiv} r$ به عبارت دیگر:

$$a = mq + r \Leftrightarrow a \overset{m}{\equiv} r\ ;(q \in \mathbb{Z})$$

توجه: هرگاه دو عدد a و b در تقسیم بر عدد طبیعی m ، هم‌باقی‌مانده باشند، داریم: $a \overset{m}{\equiv} b$

مثال:

باقی‌مانده تقسیم عدد $k = (۲۷)^۷ + ۱۹$ را بر ۱۳ بیابید:

$$۲۷ = (۱۳ \times ۲) + ۱ \to ۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \xrightarrow[\text{به توان ۷}]{\text{طرفین}} (۲۷)^۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱^۷ = ۱ \qquad (A)$$

$$۱۹ = (۱۳ \times ۱) + ۶ \to ۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۶ \qquad (B)$$

طرفین روابط A و B را جمع می‌کنیم:

$$\underbrace{(۲۷)^۷ + ۱۹}_{k} \overset{۱۳}{\equiv} ۶ + ۱ \to k \overset{۱۳}{\equiv} ۷ \to r = ۷$$

مثال:

باقی‌مانده تقسیم عدد $A=(1000)^{25}\times 9+11$ را بر ۷ بیابید:

$$1000=(142\times 7)+6\rightarrow 1000\overset{7}{\equiv}6\overset{7}{\equiv}-1\rightarrow 1000\overset{7}{\equiv}-1\xrightarrow[\text{به توان ۲۵}]{\text{طرفین}}(1000)^{25}\overset{7}{\equiv}(-1)^{25}=-1$$

$$\xrightarrow[\times 9]{\text{طرفین}}(1000)^{25}\times 9\overset{7}{\equiv}-9\xrightarrow[+11]{\text{طرفین}}(1000)^{25}\times 9+11\overset{7}{\equiv}2\rightarrow r=2$$

نکته:

عدد n رقمی $A=\overline{a_n a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}\cdots a_2 a_1 a_0}$ را در نظر بگیرید:

۱) این عدد را می‌توان به صورت مقابل بسط داد:

$$A=a_0+10a_1+10^2a_2+\cdots+10^n a_n$$

۲) باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۳ یا ۹ با باقی‌مانده تقسیم **مجموع ارقام آن عدد** بر ۳ یا ۹ برابر است.

$$A\overset{9}{\equiv}a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1+a_0\overset{9}{\equiv}\cdots$$

۳) برای به دست آوردن باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۱۱، از سمت راست عدد، ارقام را به صورت یک در میان با هم جمع و تفریق می‌کنیم و باقی‌مانده عدد به دست آمده را بر ۱۱ به دست می‌آوریم.

$$A\overset{11}{\equiv}a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+(-1)^n a_n\overset{11}{\equiv}\cdots$$

۴) باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۱۰ یا ۲ یا ۵ با باقی‌مانده تقسیم **رقم سمت راست آن عدد** بر ۱۰ یا ۲ یا ۵، برابر است.

$$A\overset{10}{\equiv}a_0\overset{10}{\equiv}\cdots$$

$$A\overset{2}{\equiv}a_0\overset{2}{\equiv}\cdots$$

$$A\overset{5}{\equiv}a_0\overset{5}{\equiv}\cdots$$

مثال:

باقی‌مانده تقسیم عدد $A=1370040 5$ را بر عدد ۹ بیابید:

$$13700405\overset{9}{\equiv}1+3+7+0+0+4+0+5\overset{9}{\equiv}20\overset{9}{\equiv}2\rightarrow r=2$$

باقی‌مانده تقسیم عدد فوق بر ۱۱ را بیابید:

$$13700405\overset{11}{\equiv}5-0+4-0+0-7+3-1\overset{11}{\equiv}4\rightarrow r=4$$

باقی‌مانده تقسیم عدد فوق بر ۲ را بیابید:

$$13700405\overset{2}{\equiv}\underbrace{13700400}_{\text{بزار کنار}}+5\overset{2}{\equiv}1\rightarrow r=1$$

مثال:

باقی‌مانده تقسیم عدد $1!+2!+3!+\cdots+500!$ را بر ۱۰ به دست آورید.

$$1!\overset{10}{\equiv}1\ ,\ 2!\overset{10}{\equiv}2\ ,\ 3!=6\overset{10}{\equiv}6$$

$$4!=24\overset{10}{\equiv}4$$

$$5!=120\overset{10}{\equiv}0$$

$$6!=720\overset{10}{\equiv}0$$

$$\vdots$$

$$500!\overset{10}{\equiv}0$$

همان‌طور که می‌بینید از $5!$ به بعد رقم یکان اعداد برابر صفر می‌شود بنابراین:

$$1!+2!+3!+\cdots+500!\overset{10}{\equiv}1+2+6+4+0......+0\overset{10}{\equiv}13\overset{10}{\equiv}3\rightarrow r=3$$

توجه:

اگر در سؤالی درباره رقم یکان یک عدد پرسیدند کافی است که باقی‌مانده تقسیم آن عدد بر ۱۰ را به دست بیاوریم.

مثال:

رقم یکان عدد $(۲^{۱۱}+۷)$ را به دست آورید.

$$۲^{۱۰}=۱۰۲۴ \to ۲^{۱۰}\overset{۱۰}{\equiv}۴ \xrightarrow[\times ۲]{\text{طرفین}} ۲^{۱۱}\overset{۱۰}{\equiv}۸ \xrightarrow[+۷]{\text{طرفین}} ۲^{۱۱}+۷\overset{۱۰}{\equiv}۱۵\overset{۱۰}{\equiv}۵$$

معادله هم‌نهشتی

یک رابطه هم‌نهشتی به همراه مجهولی مانند x به فرم $ax\overset{m}{\equiv}b$ را یک معادله هم‌نهشتی می‌گوییم و منظور از حل معادله هم‌نهشتی پیدا کردن همه جواب‌هایی چون $x_۰\in\mathbb{Z}$ است که در این معادله صدق می‌کنند.

قضیه: معادله هم‌نهشتی $ax\overset{m}{\equiv}b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a,m)\mid b$

نتیجه قضیه: در معادله هم‌نهشتی $ax\overset{m}{\equiv}b$، اگر $(a,m)=۱$ باشد، معادله همواره دارای جواب است.

توجه:

اگر در معادله هم‌نهشتی ضریب x عددی غیر از یک باشد برای رسیدن به جواب‌های عمومی معادله ابتدا باید به کمک ویژگی‌های هم‌نهشتی ضریب x را حذف کنیم.

مثال:

آیا معادله $۴x\overset{۶}{\equiv}۱۳$ دارای جواب است؟ دلیل بیاورید.

خیر. زیرا $(۴,۶)=۲\ ,\ ۲\nmid ۱۳$

مثال:

معادله هم‌نهشتی $۳x\overset{۷}{\equiv}۱۳$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.

$$\begin{cases} ۳x\overset{۷}{\equiv}۱۳ \\ ۱۳\overset{۷}{\equiv}۶ \end{cases} \to ۳x\overset{۷}{\equiv}۶ \xrightarrow{(۳,۷)=۱} x\overset{۷}{\equiv}۲ \to x=۷k+۲$$

معادله سیاله

به معادله $ax+by=c\ ;\ (a,b,c\in\mathbb{Z})$ معادله سیاله درجه اول (خطی) می‌گوییم هرگاه جواب‌های این معادله (یعنی x و y) در اعداد صحیح باشند.

توجه: شرط لازم و کافی برای اینکه معادله سیاله $ax+by=c$ جواب داشته باشد این است که: $(a,b)\mid c$

مثال:

آیا معادله سیاله $۴x+۶y=۹$ جواب صحیح دارد؟ دلیل بیاورید.

خیر. زیرا $(۴,۶)=۲\ ,\ ۲\nmid ۹$

حل معادله سیاله با تبدیل آن به معادله هم‌نهشتی

- ابتدا معادله سیاله را به یکی از دو صورت زیر تبدیل به معادله هم‌نهشتی می‌کنیم.

$$ax+by=c \to \begin{cases} ax\overset{|b|}{\equiv}c \\ by\overset{|a|}{\equiv}c \end{cases}$$

- سپس معادله هم‌نهشتی موردنظر را حل کرده و جواب به دست آمده را در معادله سیاله قرار داده و با حل آن جواب دیگر را به دست می‌آوریم.

مثال:

معادله سیاله $5x+2y=18$ را حل کنید و جواب‌های عمومی آن را بیابید.

$$5x+2y=18 \to 2y\overset{5}{\equiv}18 \xrightarrow{(2,5)=1} y\overset{5}{\equiv}9\overset{5}{\equiv}4 \to y=5k+4$$

حال $y=5k+4$ را در معادله سیاله به جای y قرار می‌دهیم:

$$5x+2(5k+4)=18 \to 5x+10k+8=18 \to 5x=-10k+10$$
$$\to 5x=5(-2k+2) \to x=-2k+2$$

مثال:

به چند طریق می‌توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

$$\begin{cases} x = \text{تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی} \\ y = \text{تعداد وزنه‌های ۵ کیلویی} \end{cases}$$

فقط دقت کنید که چون x و y تعداد وزنه‌ها را نشان می‌دهند بنابراین x و y اعدادی صحیح و نامنفی هستند $(x,y\in W)$

لذا باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله سیاله $3x+5y=23$ را پیدا کنیم.

$$3x+5y=23 \to 3x\overset{5}{\equiv}23 \to 3x\overset{5}{\equiv}(5\times 4)+3 \to 3x\overset{5}{\equiv}3$$
$$\xrightarrow{(3,5)=1} x\overset{5}{\equiv}1 \to x=5k+1$$

حال $x=5k+1$ را در معادله سیاله قرار می‌دهیم:

$$3(5k+1)+5y=23 \to 15k+3+5y=23 \to 5y=-15k+20 \to y=-3k+4$$

می‌دانیم که y و x باید صحیح و نامنفی باشند، پس:

$$\begin{cases} x\geq 0 \to 5k+1\geq 0 \to k\geq -\frac{1}{5} \\ y\geq 0 \to -3k+4\geq 0 \to k\leq \frac{4}{3} \end{cases} \xrightarrow[(k\in\mathbb{Z})]{\text{اشتراک}} \begin{cases} k=0 \\ k=1 \end{cases}$$

بنابراین دو روش برای انجام این کار وجود دارد.

$$k=0 \to \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \to (\text{یک وزنه ۳ کیلویی و ۴ وزنه ۵ کیلویی})$$

$$k=1 \to \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases} \to (\text{۶ وزنه ۳ کیلویی و یک وزنه ۵ کیلویی})$$

فصل دوم

نکته‌های مهم:

نکته ۱:

- به گرافی که برای یال‌های آن جهت تعیین شده باشد **گراف جهت‌دار** می‌گوییم.
- تعداد رأس‌های گراف G را **مرتبه گراف** G می‌گوییم و آن را با $p(G)$ یا $|V(G)|$ نشان می‌دهیم.
- تعداد یال‌های گراف G را **اندازه گراف** G می‌گوییم و آن را با $q(G)$ یا $|E(G)|$ نشان می‌دهیم.
- به تعداد یال‌هایی که به رأس v در گراف G متصل هستند **درجهٔ رأس** v گوییم و آن را با $\deg(v)$ یا $d(v)$ نشان می‌دهیم.
- اگر درجه یک رأس فرد باشد آن را **رأس فرد** و اگر درجه یک رأس زوج باشد آن را رأس زوج می‌گوییم.
- به رأسی که درجه آن صفر باشد (هیچ یالی به آن متصل نباشد)، **رأس تنها** (یا رأس ایزوله) می‌گوییم.
- گرافی را که تمام رئوس آن رأس تنها باشند (هیچ یالی نداشته باشد) **گراف تهی** می‌گوییم.
- گرافی که درجه تمام رأس‌های آن با هم مساوی و برابر عدد K باشد، **گراف $K-$منتظم** می‌گوییم.

توجه: گراف فرد ـ منتظم از مرتبه فرد وجود ندارد.

- به یالی که یک رأس را به خود آن رأس وصل کند **طوقه** گفته می‌شود.

گراف ساده گرافی است که
- طوقه ندارد.
- یال جهت‌دار ندارد.
- بین هر دو رأس آن حداکثر یک یال وجود داشته باشد.

- دو رأس u و v را **دو رأس همسایه یا مجاور** می‌گوییم اگر توسط یالی به هم وصل شده باشند.
- به مجموعه رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند، **همسایگی باز رأس** v می‌گوییم و آن را با $N_G(v)$ نشان می‌دهیم. حال اگر خود رأس v را نیز به این مجموعه اضافه کنیم مجموعه‌ای به دست می‌آید که به آن **همسایگی بسته رأس** v گفته و آن را با $N_G[v]$ نشان می‌دهیم.
- دو یال را **مجاور** گوییم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آن‌ها به آن متصل باشند.
- بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را **ماکزیمم درجه گراف** می‌نامیم و آن را با $\Delta(G)$ نشان می‌دهیم.
- کوچک‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را **مینیمم درجه گراف** می‌نامیم و آن را با $\delta(G)$ نشان می‌دهیم.
- یک **زیرگراف** از گراف G گرافی است که مجموعه رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف G و مجموعه یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه یال‌های گراف G باشد.

مکمل گراف G
- آن را با G^c یا $\overline{G}$ نشان می‌دهیم.
- مجموعه رئوس مکمل گراف G همان مجموعه رئوس گراف G است.
- اگر بین دو رأس دلخواه از گراف G یالی وجود نداشته باشد در این صورت بین همان دو رأس در گراف مکمل، یک یال وجود دارد (و بالعکس)
- اگر G یک گراف از مرتبه p و v یک رأس از آن باشد داریم: $d_G(v)+d_{\overline{G}}(v)=p-۱$
- اگر G یک گراف از مرتبه p و اندازه q باشد، داریم: $q(G)+q(\overline{G})=\frac{p(p-۱)}{۲}$

گراف کامل

به گرافی که هر رأس آن با تمام رئوس دیگر مجاور باشد، گراف کامل می‌گوییم.

گراف کامل p رأسی را با k_p نمایش می‌دهیم و می‌توان گفت که k_p یک گراف p رأسی و $(p-۱)-$منتظم است.

تعداد یال‌های یک گراف کامل p رأسی برابر است با: $q(k_p)=\dfrac{p(p-۱)}{۲}$

مکمل یک گراف کامل، یک گراف تهی است و بالعکس.

مسیر

اگر u و v دو رأس از گراف G باشند یک مسیر از u به v در G، دنباله‌ای از رئوس دو به دو متمایز در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود به‌طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور هم باشند.

طول یک مسیر = تعداد یال‌های موجود در آن مسیر = یکی کمتر از تعداد رأس‌های موجود در آن مسیر

دنباله متشکل از تنها یک رأس v، یک مسیر با طول صفر از رأس v به خودش است.

گرافی را که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده با P_n نمایش می‌دهیم. ببین:

$P_۴$

دور

دنباله $(n\geq ۳)\ ;\ v_۱v_۲v_۳\cdots v_nv_۱$، از رئوس دوبه‌دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می‌نامیم.

گرافی که تنها از یک دور n رأسی تشکیل شده باشد را با C_n نمایش می‌دهیم. ببین:

- گراف G را همبند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد در غیر این صورت آن را ناهمبند می‌نامیم.

نکته ۲: اگر G یک گراف با مرتبه p و اندازه q و $V=\{v_۱,v_۲,\dots,v_p\}$ مجموعه رئوس آن باشند، آن‌گاه:

$$\sum_{i=۱}^{p}\deg v_i=۲q$$

نکته ۳: تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

نکته ۴: اگر G یک گراف ساده با مرتبه p و اندازه q باشد، آن‌گاه:

$$۰\leq q\leq \frac{p(p-۱)}{۲}$$

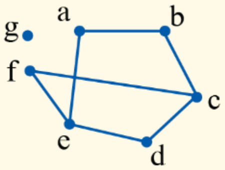
نکته ۵: در یک گراف $k-$منتظم از مرتبه p و اندازه q، داریم:

$$pk=۲q$$

مثال:

گراف G با مجموعه رأس‌های $V=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ و مجموعه یال‌های $E=\{ab,bc,cd,ed,ae,cf,ef\}$ را در نظر بگیرید:

الف) نمودار گراف را رسم کنید:



ب) مرتبه و اندازه گراف G را مشخص کنید:

$$\begin{cases} p(G)=۷ \\ q(G)=۷ \end{cases}$$

پ) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟

$$\sum_{i=۱}^{۷} \deg v_i = ۲q = ۲(۷) = ۱۴$$

ت) کدام رأس‌های گراف G با رأس f مجاورند؟ e و c

ث) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

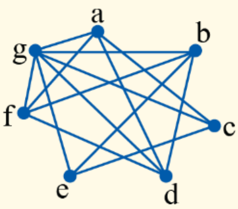
$$\begin{cases} \Delta(G)=۳ \\ \delta(G)=۰ \end{cases}$$

ج) یک مسیر به طول ۵ از b به d بنویسید. $b\,a\,e\,f\,c\,d$

چ) یک دور به طول ۴ مشخص کنید. $f\,c\,d\,e\,f$

هـ) مکمل گراف G را رسم کنید.

- بزرگ‌ترین درجه مربوط به رأس g و برابر ۶ است.



خ) $N_G[b]$ را مشخص کنید.

$$N_G[b]=\{a,b,c\}$$

د) آیا گراف G همبند است؟ خیر ـ چرا؟ چون مثلاً از g به a مسیری وجود ندارد.

ذ) با ذکر دلیل مشخص کنید که گراف مکمل چند یال دارد؟

$$q(G)+q(\overline{G})=\frac{p(p-۱)}{۲} \xrightarrow{q(G)=۷} ۷+q(\overline{G})=\frac{۷(۶)}{۲} \rightarrow q(\overline{G})=۲۱-۷=۱۴$$

مثال:

یک گراف کامل ۸ رأسی چند یال دارد؟

$$q(k_۸)=\frac{p(p-۱)}{۲}=\frac{۸(۷)}{۲}=۲۸$$

مثال:

در گراف G، درجه رأس v برابر ۹ است و درجه رأس v در گراف $\overline{G}$ برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید.

$$\begin{cases} \deg_G(v)=۹ \\ \deg_{\overline{G}}(v)=۱۲ \end{cases}$$

$$\deg_G(v)+\deg_{\overline{G}}(v)=p-۱ \rightarrow ۹+۱۲=p-۱ \rightarrow p=۲۲$$

مثال:

گراف کامل k_p دارای ۱۰ یال است. تعداد رأس‌های این گراف را به دست آورید.

$$q(k_p)=\frac{p(p-۱)}{۲} \xrightarrow{q=۱۰} ۱۰=\frac{p(p-۱)}{۲} \rightarrow p(p-۱)=۲۰ \xrightarrow{p>۰} p=۵$$

مثال:

گراف G، ۳ـ منتظم است و اندازه آن ۳ واحد کمتر از ۲ برابر تعداد رأس‌های گراف است. مرتبه گراف را به دست آورید.

$$q = ۲p - ۳$$

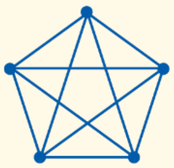
از طرفی: $pk = ۲q \xrightarrow{k=۳} ۳p = ۲q \rightarrow q = \frac{۳}{۲}p$

$$\rightarrow \frac{۳}{۲}p = ۲p - ۳ \rightarrow \frac{p}{۲} = ۳ \rightarrow p = ۶$$

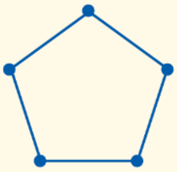
مثال:

یک گراف ۵ رأسیِ غیرتهیِ k ـ منتظم رسم کنید به طوری که:

الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.



ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.



توجه کنید که گراف فرد ـ منتظم از مرتبه فرد وجود ندارد.